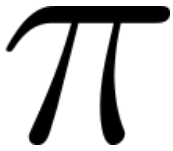
WIKIPEDIA

Kreiszahl

Die **Kreiszahl** π (Pi), auch **Ludolphsche Zahl, Ludolfsche Zahl** oder **Archimedes-Konstante**, ist eine mathematische Konstante, die als Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser definiert ist. Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Größe des Kreises. π ist eine transzendente und somit auch irrationale Zahl und kommt in zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, auch außerhalb der Geometrie, vor. Die Dezimalbruchentwicklung der Kreiszahl beginnt mit $\pi = 3{,}1415926\ldots$, wobei in praktischen Berechnungen mit π oft nur drei signifikante Stellen verwendet werden: $\pi \approx 3{,}14$.



Der griechische Buchstabe Pi ist das Symbol der Kreiszahl.

Ein Kreis mit dem Durchmesser 1 hat den Umfang π.

Inhaltsverzeichnis

Geschichte der Bezeichnung

Mathematische Grunddaten
- Definition
- Irrationalität und Transzendenz
- Die ersten 100 Nachkommastellen
- Kettenbruchentwicklung
- Näherungsbrüche der Kreiszahl
- Sphärische Geometrie

Geschichte der Berechnung
- Erste Schätzungen
- Archimedes von Syrakus
  - Der Denkansatz: Konstantes Verhältnis bei Flächen- wie Umfangsberechnung
  - Annäherung durch Vielecke
- Genauer und genauer – 3. bis 18. Jahrhundert
- Die handwerkliche Praxis gestern und heute

Moderne numerische Verfahren
- BBP-Reihen
- Tröpfelalgorithmus
- Berechnung mittels Flächenformel
  - Programm
  - Alternatives Programm
- Statistische Bestimmung
  - Buffonsches Nadelproblem
- Methode von Gauß, Brent und Salamin

Geometrische Konstruktionen
- Näherungskonstruktionen
- Quadratrix des Hippias als zusätzliches Hilfsmittel

Experimentelle Konstruktion

Formeln, Anwendungen, offene Fragen
- Formeln, die π enthalten
  - Formeln der Geometrie
  - Formeln der Analysis
    - Formeln der Funktionentheorie
  - Formeln der Zahlentheorie
  - Formeln der Physik
  - Produktformeln von Leonhard Euler
- Offene Frage der Normalität

Sonstiges
- Rekorde und Kuriositäten
- Film, Musik, Kultur und Literatur
- Pi-Sport
- Entwicklung der Nachkommastellen von π

Alternative Kreiszahl τ
Literatur
Weblinks
Anmerkungen
Einzelnachweise

Geschichte der Bezeichnung

Die Kreiszahl und manche ihrer Eigenschaften waren bereits in der Antike bekannt.

Die Bezeichnung mit dem griechischen Buchstaben Pi (π) (nach dem Anfangsbuchstaben des griechischen Wortes περιφέρεια – zu lateinisch *peripheria*, „Randbereich“ oder περίμετρος – *perimetros*, „Umfang“) wurde erstmals von William Oughtred in seiner bereits 1647 veröffentlichten Schrift *Theorematum in libris Archimedis de Sphæra & Cylyndro Declaratio* verwendet. Darin drückte er mit $\frac{\pi}{\delta}$[1] das Verhältnis von halbem Kreisumfang *(semiperipheria)* zu Halbmesser *(semidiameter)* aus, d. h. $\frac{\pi}{\delta} = 3{,}1415\ldots$[2]

Dieselben Bezeichnungen benutzte um 1664 auch der englische Mathematiker Isaac Barrow.

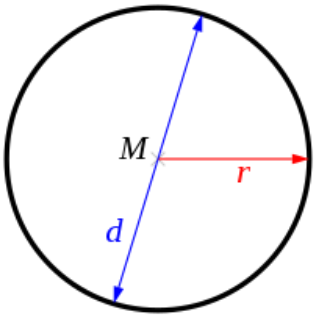
David Gregory nahm $\frac{\pi}{\rho}$ (1697) für das Verhältnis von Umfang zu Radius.[3]

59 Jahre später als Oughtred, nämlich im Jahr 1706, setzte der walisische Mathematiker William Jones in seiner *Synopsis Palmariorum Matheseos* als Erster den griechischen Kleinbuchstaben π ein, um das *Verhältnis von Umfang zu Durchmesser* auszudrücken.[4][5]

Erst im 18. Jahrhundert wurde π durch Leonhard Euler populär. Er verwendete 1737 erstmals π für die Kreiszahl, nachdem er zuvor p verwendet hatte. Seitdem ist aufgrund der Bedeutung Eulers diese Bezeichnung allgemein üblich.

Mathematische Grunddaten

Definition



Kreis mit eingezeichnetem Mittelpunkt M, Radius r und Durchmesser d

Es existieren mehrere gleichwertige Ansätze, die Kreiszahl π zu definieren.

Die erste (klassische!) Definition in der Geometrie ist die, wonach die Kreiszahl eine Verhältniszahl ist, die numerisch dem aus dem Umfang U eines Kreises und dem zugehörigen Durchmesser d gebildeten Quotienten $\pi = \frac{U}{d}$ entspricht. Der zweite Ansatz der Geometrie ist damit verwandt und besteht darin, unter der Kreiszahl den Quotienten $\pi = \frac{A}{r^2}$ zu verstehen, der aus dem Flächeninhalt A eines Kreises und dem Flächeninhalt eines über einem Halbmesser (der Länge r) errichteten Quadrates gebildet wird. (Diese Halbmesserlänge bezeichnet man als *Kreisradius*.) Man fasst diese zweite Definition in den Merksatz, dass sich eine Kreisfläche zur umgebenden Quadratfläche wie $\pi : 4$ verhält.[6]

In der Analysis geht man (nach Edmund Landau) oft so vor, zunächst die reelle Kosinusfunktion $\cos(x)$ über ihre Taylorreihe zu definieren und dann die Kreiszahl als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus festzulegen.[7][8] Weitere analytische Ansätze gehen auf John Wallis und Leonhard Euler zurück.[9]

Irrationalität und Transzendenz

Die Zahl π ist eine irrationale Zahl, also eine reelle, aber keine rationale Zahl. Das bedeutet, dass sie nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, also nicht als Bruch $\frac{p}{q}$, dargestellt werden kann. Das wurde 1761 (oder 1767) von Johann Heinrich Lambert bewiesen.[10][A 1]

Tatsächlich ist die Zahl π sogar transzendent, was bedeutet, dass es kein Polynom mit rationalen Koeffizienten gibt, das π als eine Nullstelle hat. Das wurde erstmals von Ferdinand von Lindemann 1882 bewiesen. Als Konsequenz ergibt sich daraus, dass es unmöglich ist, π nur mit ganzen Zahlen oder Brüchen und Wurzeln auszudrücken, und dass die exakte Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

Die ersten 100 Nachkommastellen

Da π eine irrationale Zahl ist, lässt sich ihre Darstellung in keinem Stellenwertsystem vollständig angeben: Die Darstellung ist stets unendlich lang und nicht periodisch. Bei den ersten 100 Nachkommastellen in der Dezimalbruchentwicklung[11]

π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 9…

ist keine Regelmäßigkeit ersichtlich. Auch weitere Nachkommastellen genügen statistischen Tests auf Zufälligkeit. Siehe auch den Abschnitt zur Frage der Normalität.[12]

Kettenbruchentwicklung

Eine alternative Möglichkeit, reelle Zahlen darzustellen, ist die Kettenbruchentwicklung. Da π irrational ist, ist diese Darstellung unendlich lang. Der *reguläre* Kettenbruch[A 2] der Kreiszahl beginnt so:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}$$

Eine mit der regulären Kettenbruchentwicklung verwandte Entwicklung von π ist diejenige als negativ-regelmäßiger Kettenbruch[A 3] (Folge A280135 in OEIS):

$$\pi = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{17 - \cfrac{1}{294 - \ddots}}}}}}}}$$

Anders als bei der Eulerschen Zahl e konnten bislang bei der regulären Kettenbruchdarstellung von π keine Muster oder Gesetzmäßigkeiten festgestellt werden.[13]

Jedoch gibt es *nicht-reguläre* Kettenbruchdarstellungen von π, bei denen einfache Gesetzmäßigkeiten erkennbar sind:[14]

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \ddots}}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \ddots}}}}}}$$

Näherungsbrüche der Kreiszahl

Aus ihrer regulären Kettenbruchdarstellung ergeben sich als beste Näherungsbrüche der Kreiszahl (Zähler Folge A002485 in OEIS bzw. Nenner Folge A002486 in OEIS) die folgenden:[15][16]

Schritt	Kettenbruch	Näherungsbruch	Dezimaldarstellung (falsche Ziffern in rot)	Absoluter Fehler bei der Umfangsberechnung eines Kreises von 1000 km Durchmesser
$\frac{p_0}{q_0}$	$[3]$	$\frac{3}{1}$	3,0	− 141,59 km
$\frac{p_1}{q_1}$	$[3;7]$	$\frac{22}{7}$	3,142 85 ...	+ 1,26 km
$\frac{p_2}{q_2}$	$[3;7,15]$	$\frac{333}{106}$	3,141 509 4...	− 83,22 m
$\frac{p_3}{q_3}$	$[3;7,15,1]$	$\frac{355}{113}$	3,141 592 920 ...	+ 26,68 cm
$\frac{p_4}{q_4}$	$[3;7,15,1,292]$	$\frac{103993}{33102}$	3,141 592 653 011 ...	− 0,58 mm
$\frac{p_5}{q_5}$	$[3;7,15,1,292,1]$	$\frac{104348}{33215}$	3,141 592 653 921 ...	+ 0,33 mm
⋮				
$\frac{p_{10}}{q_{10}}$	$[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3]$	$\frac{4272943}{1360120}$	3,141 592 653 589 389 ...	− 0,4 µm (Wellenlänge blauen Lichts)
⋮				
$\frac{p_{20}}{q_{20}}$	$[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1]$	$\frac{21053343141}{6701487259}$	3,141 592 653 589 793 238 462 381 ...	− 2,6·10^{-16} m (kleiner als ein Proton)

Der absolute Fehler in der Praxis wird dabei schnell vernachlässigbar: Mit der 20. Näherung $\left(\frac{p_{20}}{q_{20}}\right)$ stimmen 21 Nachkommastellen mit denen der Kreiszahl π überein. Mit diesem Näherungsbruch wäre erst der Umfang eines Kreises von etwa 3,8 Billiarden km Durchmesser (das entspricht der Entfernung zum Polarstern) um einen Millimeter falsch (hier zu kurz) berechnet.

Sphärische Geometrie

In der Kugelgeometrie ist der Begriff Kreiszahl nicht gebräuchlich, da das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser in diesem Fall nicht mehr für alle Kreise gleich, sondern von deren Größe abhängig ist. Für einen Kreis mit einem sehr viel kleineren Durchmesser als dem der Kugel, auf deren Oberfläche er „gezeichnet“ wird (etwa ein Kreis mit 1 m Durchmesser auf der kugeligen Erdoberfläche), ist die Krümmung der Kugelfläche gegenüber der euklidischen Kreisebene meist vernachlässigbar klein, bei größeren Kreisen oder hoher Präzisionsanforderung muss sie berücksichtigt werden.

Geschichte der Berechnung

Die Notwendigkeit, den Umfang eines Kreises aus seinem Durchmesser zu ermitteln oder umgekehrt, stellt sich im ganz praktischen Alltag – man braucht solche Berechnungen zum Beschlagen eines Rades, zum Einzäunen runder Gehege, zum Berechnen der Fläche eines runden Feldes oder des Rauminhalts eines zylindrischen Getreidespeichers. Daher suchten Menschen schon früh nach der exakten Kreiszahl und stellten immer genauere Schätzungen auf.

Schließlich gelang es dem griechischen Mathematiker Archimedes um 250 v. Chr., die Zahl mathematisch einzugrenzen. In der weiteren Geschichte wurden die Versuche zur größtmöglichen Annäherung an π phasenweise zu einer regelrechten Rekordjagd, die zuweilen skurrile und auch aufopfernde Züge annahm.

Erste Schätzungen

Das älteste bekannte Rechenbuch der Welt, das altägyptische Rechenbuch des Ahmes (auch *Papyrus Rhind*, 16. Jahrhundert v. Chr.), nennt den Wert $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}1605$. Als Näherung für π benutzten die Babylonier einfach nur 3 oder auch $3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$.

Der grobe babylonische Wert 3 findet sich auch in der biblischen Beschreibung des Wasserbeckens, das für den Jerusalemer Tempel geschaffen wurde:

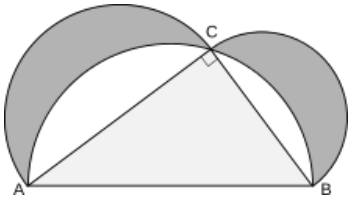
> „Dann machte er das Meer. Es wurde aus Bronze gegossen und maß 10 Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und 5 Ellen hoch. Eine Schnur von 30 Ellen konnte es rings umspannen.“
> – 1 Kön 7,23

Den Wert 3 nutzte man auch im alten China. In Indien nahm man für die Kreiszahl in den Sulbasutras, den Schnurregeln zur Konstruktion von Altären, den Wert $\left(\frac{26}{15}\right)^2 \approx 3{,}0044$ und wenige Jahrhunderte v. Chr. in der Astronomie den Näherungswert $\sqrt{10} \approx 3{,}1623.$ Der indische Mathematiker und Astronom Aryabhata gibt 498 n. Chr. das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser mit $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ an.

Archimedes von Syrakus

Der Denkansatz: Konstantes Verhältnis bei Flächen- wie Umfangsberechnung

Archimedes von Syrakus bewies, dass der Umfang eines Kreises sich zu seinem Durchmesser genauso verhält wie die Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius. Das jeweilige Verhältnis ergibt also in beiden Fällen die Kreiszahl. Für Archimedes und noch für viele Mathematiker nach ihm war unklar, ob die Berechnung von π nicht doch irgendwann zum Abschluss käme, ob π also eine rationale Zahl sei, was die jahrhundertelange Jagd auf die Zahl verständlich werden lässt. Zwar war den griechischen Philosophen mit der Irrationalität von $\sqrt{2}$ die Existenz derartiger Zahlen bekannt, dennoch hatte Archimedes keinen Grund, bei einem Kreis von vornherein eine rationale Darstellbarkeit der Flächenberechnung auszuschließen. Denn es gibt durchaus allseitig krummlinig begrenzte Flächen, die sogar von Kreisteilen eingeschlossen sind, die sich als rationale Zahl darstellen lassen wie die *Möndchen des Hippokrates*.

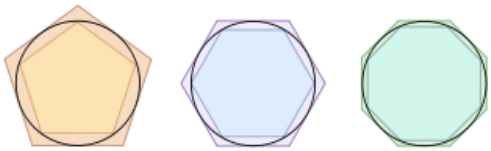


Die Summe der Flächen der grauen Möndchen entspricht der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks

Erst 1761/1767 konnte Johann Heinrich Lambert die lange vermutete Irrationalität von π beweisen.

Annäherung durch Vielecke

Archimedes versuchte wie auch andere Forscher, sich mit regelmäßigen Vielecken dem Kreis anzunähern und auf diese Weise Näherungen für π zu gewinnen. Mit umbeschriebenen und einbeschriebenen Vielecken, beginnend bei Sechsecken, durch wiederholtes Verdoppeln der Eckenzahl bis zu 96-Ecken, berechnete er obere und untere Schranken für den Kreisumfang.[17] Er kam zu der Abschätzung, dass das gesuchte Verhältnis etwas kleiner als $3 + \frac{10}{70}$ sein müsse, jedoch größer als $3 + \frac{10}{71}$:


Annäherung an einen Kreis durch Um- und Einbeschreiben von Fünfecken, Sechsecken und Achtecken

$$3{,}1408450 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \approx 3{,}1428571$$

Laut Heron besaß Archimedes eine noch genauere Abschätzung, die aber falsch überliefert ist:

$$3 + \frac{9552}{67441} < \pi < 3 + \frac{10835}{62351} \qquad (3{,}1416349 < \pi < 3{,}1737743)$$

Wilbur Knorr korrigierte zu:[18]

$$3 + \frac{8915}{62991} < \pi < 3 + \frac{9552}{67441} \qquad (3{,}1415281 < \pi < 3{,}1416349)$$

Genauer und genauer – 3. bis 18. Jahrhundert

Wie in manchen anderen gesellschaftlichen und kulturellen Bereichen gab es auch in der Mathematik in den westlichen Kulturen eine sehr lange Zeit des Stillstandes nach Ende der Antike und während des Mittelalters. Fortschritte in der Annäherung an π erzielten in dieser Zeit vor allem chinesische und persische Wissenschaftler.

Im dritten Jahrhundert bestimmte Liu Hui aus dem 192-Eck die Schranken 3,141024 und 3,142704 sowie später aus dem 3072-Eck den Näherungswert 3,14159.

Um 480 berechnete der chinesische Mathematiker und Astronom Zu Chongzhi (429–500) für die Kreiszahl $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$, also die ersten 7 Dezimalstellen. Er kannte auch den fast genauso guten Näherungsbruch $\frac{355}{113}$ (das ist der dritte Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von π), der in Europa erst im 16. Jahrhundert gefunden wurde (Adriaan Metius, deshalb auch Metius-Wert genannt). Im 14. Jahrhundert berechnete Zhao Youqin die Kreiszahl über ein 16384-Eck auf sechs Dezimalstellen genau.

In seinem 1424 abgeschlossenen Werk *Abhandlung über den Kreis* berechnete der persische Wissenschaftler Dschamschid Masʿud al-Kaschi mit einem 3×2^{28}-Eck 2π bereits auf 16 Stellen genau.[19]

Im Europa gelang es Ludolph van Ceulen 1596 die ersten 35 Dezimalstellen von π zu berechnen. Angeblich opferte er 30 Jahre seines Lebens[20] für diese Berechnung. Van Ceulen steuerte allerdings noch keine neuen Gedanken zur Berechnung bei. Er rechnete einfach nach der Methode des Archimedes weiter, aber während Archimedes beim 96-Eck aufhörte, setzte Ludolph die Rechnungen bis zum einbeschriebenen 2^{62}-Eck fort. Der Name *Ludolphsche Zahl* erinnert an seine Leistung.

Der französische Mathematiker François Viète variierte 1593 die Archimedische Exhaustionsmethode, indem er den Flächeninhalt eines Kreises durch eine Folge einbeschriebener 2^n-Ecke annäherte. Daraus leitete er als Erster eine geschlossene Formel für π in Form eines unendlichen Produktes ab:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

Der englische Mathematiker John Wallis entwickelte 1655 das nach ihm benannte *wallissche Produkt:*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$$

John Wallis

Wallis zeigte 1655 diese Reihe Lord Brouncker, dem ersten Präsidenten der „Royal Society“, der die Gleichung als Kettenbruch wie folgt darstellte:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{\ddots}}}}}$$

Allmählich wurden die Rechnungen komplizierter, Gottfried Wilhelm Leibniz steuerte 1682 folgende Reihendarstellung bei:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \cdots$$

Gottfried Wilhelm Leibniz (Porträt von Christoph Bernhard Francke, um 1700)

Siehe auch *Kreiszahlberechnung nach Leibniz*.

Diese war indischen Mathematikern bereits im 15. Jahrhundert bekannt. Leibniz entdeckte sie für die europäische Mathematik neu und bewies die Konvergenz dieser unendlichen Summe. Die obige Reihe ist wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ auch ein Spezialfall ($\theta = 1$) der Reihenentwicklung des Arkustangens, die der schottische Mathematiker James Gregory in den 1670er Jahren fand:

$$\arctan \theta = \frac{\theta^1}{1} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} \pm \cdots$$

Sie war in der folgenden Zeit Grundlage vieler Approximationen von π, die alle lineare Konvergenzgeschwindigkeit haben.

Im Jahr 1706 beschrieb William Jones in seinem Werk *Synopsis palmariorum matheseos* die von ihm entwickelt Reihe, mit der er 100 Dezimalstellen (Nachkommastellen) von π bestimmte.

„Let $\alpha = 2\sqrt{3}$. […] Then $\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}$, &c.“[4]

William Jones bezeichnete 1706, wie zuvor William Oughtred 1647, die Kreiszahl mit π

Ebenfalls im Jahr 1706 berechnete John Machin mit seiner Formel gleichfalls die ersten 100 Dezimalstellen von π. Seine Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

lässt sich zusammen mit der taylorschen Reihenentwicklung der Arkustangensfunktion für schnelle Berechnungen verwenden. Diese Formel lässt sich im Reellen über das Additionstheorem des Arkustangens gewinnen, einfacher geht es durch Betrachtung des Argumentes der komplexen Zahl

$$(5+\mathrm{i})^4 \cdot (239-\mathrm{i}) = 114244 + 114244\,\mathrm{i} = (1+\mathrm{i}) \cdot 114244.$$

Im Laufe der Zeit wurden noch mehr Formeln dieser Art gefunden. Ein Beispiel stammt von F. C. W. Størmer (1896):

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943},$$

was gleichbedeutend damit ist, dass Real- und Imaginärteil der Gaußschen Zahl

$$(57+\mathrm{i})^{44} \cdot (239+\mathrm{i})^{7} \cdot (682-\mathrm{i})^{12} \cdot (12943+\mathrm{i})^{24} = (1+\mathrm{i}) \cdot n \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

gleich sind.[A 4]

Leonhard Euler führte in seiner im Jahre 1748 erschienenen *Introductio in Analysin Infinitorum* im ersten Bande π bereits auf 148 Stellen genau an. Von Euler entdeckte Formeln (siehe auch *Riemannsche ζ-Funktion*):

Leonhard Euler (Pastell von Emanuel Handmann, 1753)

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{\pi-3}{4} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7\cdot8} \mp \cdots$$

Johann Heinrich Lambert publizierte 1770 einen Kettenbruch, der heute meist in der Form

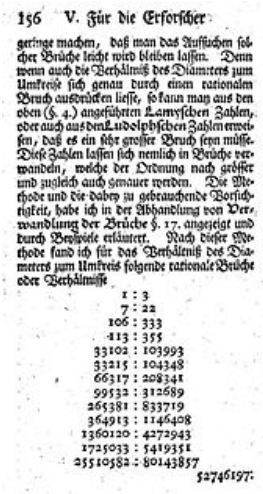
Johann Heinrich Lambert

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{\ddots}}}}}}$$

geschrieben wird. Pro Schritt ergeben sich im Mittel etwa 0,76555 Dezimalstellen, was im Vergleich mit anderen Kettenbrüchen relativ hoch ist, sodass sich dieser Kettenbruch besonders gut zur Berechnung von π eignet.

Die handwerkliche Praxis gestern und heute

Handwerker benutzten in Zeiten vor Rechenschieber und Taschenrechner die Näherung $\frac{22}{7} \approx 3{,}142857$ und berechneten damit vieles im Kopf. Der Fehler gegenüber π beträgt etwa 0,04 %. Für alltägliche praktische Situationen war das völlig ausreichend.



156 V. Für die Erforscher

geringe machen, daß man das Aufsuchen solcher Brüche leicht wird bleiben lassen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken ließe, so kann man aus den oben (§. 4.) angeführten Lamyschen Zahlen, oder auch aus den Ludolphschen Zahlen erweisen, daß es ein sehr grosser Bruch seyn müsse. Diese Zahlen lassen sich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach größer und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorsichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von Verwandlung der Brüche §. 17. angezeigt und durch Beyspiele erläutert. Nach dieser Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse

1 : 3
7 : 22
106 : 333
113 : 355
33102 : 103993
33215 : 104348
66317 : 208341
99532 : 312689
265381 : 833719
364913 : 1146408
1360120 : 4272943
1725033 : 5419351
25510582 : 80143857

52746197.

Lambert: *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.* Band 2, Ausgabe 1, 1792, Seite 156.

Eine andere oft genutzte Näherung war der Bruch $\frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$, immerhin auf sieben Stellen genau. Allen diesen rationalen Näherungswerten für π ist gemeinsam, dass sie *partiellen* Auswertungen der Kettenbruchentwicklung von π entsprechen, z. B.:

$$\frac{22}{7} = [3;7], \quad \frac{355}{113} = [3;7,15,1]$$

Keine der bislang entwickelten Formeln konnte zur effizienten Berechnung von Näherungswerten für π dienen, auch die erstaunliche Entdeckung des Inders Srinivasa Ramanujan aus dem Jahr 1914, basierend auf Untersuchungen von elliptischen Funktionen und Modulfunktionen, war dazu noch nicht geeignet:[21]

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot (1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}$$

Diese Formel liefert schon bei zweimaliger Iteration (bis $n = 1$) 15 korrekte Nachkommastellen.

Effizientere Verfahren, deren Implementation allerdings nur bei Verfügbarkeit von Langzahlarithmetik interessant ist, sind Iterationsverfahren mit quadratischer oder noch höherer Konvergenz.[22]

Moderne numerische Verfahren

BBP-Reihen

→ *Hauptartikel: Bailey-Borwein-Plouffe-Formel*

1995 entdeckte Simon Plouffe zusammen mit Peter Borwein und David Harold Bailey eine neuartige Reihendarstellung für π:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Diese Reihe (auch Bailey-Borwein-Plouffe-Formel genannt) ermöglicht es, die n-te Stelle einer binären, hexadezimalen oder beliebigen Darstellung zu einer Zweierpotenz-Basis von π zu berechnen, ohne dass zuvor die $n-1$ vorherigen Ziffernstellen berechnet werden müssen.

Später wurden für π weitere BBP-Reihen gefunden:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{8}{8k+2} + \frac{4}{8k+3} + \frac{4}{8k+4} - \frac{1}{8k+7} \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{8}{8k+1} + \frac{8}{8k+2} + \frac{4}{8k+3} - \frac{2}{8k+5} - \frac{2}{8k+6} - \frac{1}{8k+7} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)
\end{aligned}$$

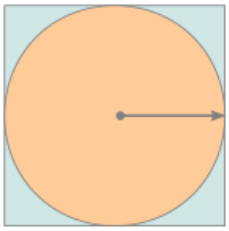
Tröpfelalgorithmus

→ *Hauptartikel: Tröpfelalgorithmus*

Eng verwandt mit den Verfahren zur Ziffernextraktion sind Tröpfelalgorithmen, bei denen die Ziffern eine nach der anderen berechnet werden. Den ersten solchen Algorithmus zur Berechnung von π fand Stanley Rabinowitz.[23] Seitdem sind weitere Tröpfelalgorithmen zur Berechnung von π gefunden worden.

Berechnung mittels Flächenformel

Diese Berechnung nutzt den Zusammenhang aus, dass π in der Flächenformel des Kreises enthalten ist, dagegen nicht in der Flächenformel des umschreibenden Quadrats.



In ein Quadrat einbeschriebener Kreis für die Berechnung mittels Flächenformel

Die Formel für den Flächeninhalt des Kreises mit Radius r lautet

$$A_K = \pi r^2,$$

der Flächeninhalt des Quadrates mit Seitenlänge $2r$ errechnet sich als

$$A_Q = (2r)^2.$$

Für das Verhältnis der Flächeninhalte eines Kreises und seines umschreibenden Quadrats ergibt sich also

$$\frac{A_K}{A_Q} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Damit lässt sich π als das Vierfache dieses Verhältnisses schreiben:

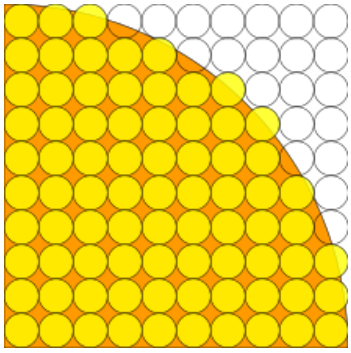
$$\pi = 4\,\frac{A_K}{A_Q}.$$

Programm

Als Beispiel ist ein Algorithmus angegeben, in dem die Flächenformel demonstriert wird, mit der π näherungsweise berechnet werden kann.

Man legt dazu über das Quadrat ein Gitter und berechnet für jeden einzelnen Gitterpunkt, ob er auch im Kreis liegt. Das Verhältnis der Gitterpunkte innerhalb des Kreises zu den Gitterpunkten innerhalb des Quadrats wird mit 4 multipliziert. Die Genauigkeit der damit gewonnenen Näherung von π hängt von der Gitterweite ab und wird mittels r kontrolliert. Mit $r = 10$ erhält man z. B. 3,16 und mit $r = 100$ bereits 3,1428. Für das Ergebnis 3,14159 ist allerdings schon $r = 10000$ zu setzen, was sich durch den zweidimensionalen Lösungsansatz auf die Zahl der notwendigen Rechenvorgänge in quadratischer Form niederschlägt.

```
r = 10000
kreistreffer = 0
quadrattreffer = r ^ 2
for i = 0 to r - 1
  x = i + 0.5
  for j = 0 to r - 1
    y = j + 0.5
    if x ^ 2 + y ^ 2 <= r ^ 2 then
      kreistreffer = kreistreffer + 1
return 4 * kreistreffer / quadrattreffer
```



Viertelkreis, mit Flächenraster 10×10 angenähert

Anmerkung: Das obige Programm ist nicht für die schnellstmögliche Ausführung auf einem realen Computersystem optimiert, sondern aus Gründen der Verständlichkeit so klar wie möglich formuliert worden. Weiterhin ist die Kreisfläche insofern unpräzise bestimmt, als nicht die Koordinaten der Mitte für die jeweiligen Flächeneinheiten benutzt werden, sondern der Flächenrand. Durch die Betrachtung eines Vollkreises, dessen Fläche für die erste und letzte Zeile gegen Null geht, ist die Abweichung für großes r marginal.

Die Konstante Pi ist für den Alltagsgebrauch in Computerprogrammen typischerweise bereits vorberechnet vorhanden, üblicherweise ist der zugehörige Wert dabei mit etwas mehr Stellen angegeben, als ihn die leistungsfähigsten Datentypen dieser Computersprache aufnehmen können.

Alternatives Programm

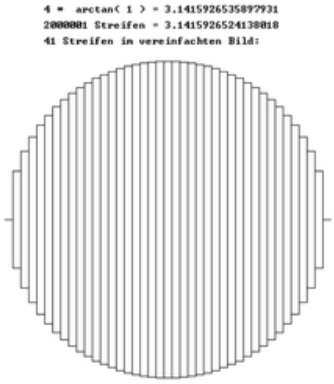
Dieses Programm summiert die Fläche des Kreises aus im Verhältnis zum Radius sehr schmalen Streifen. Es verwendet die Gleichungen

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \text{ und } \pi = \frac{A_K}{r^2} \text{ sowie } \pi = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

```
n := 1000000 // Halbe Anzahl der Streifen
s := 0       // Summe der Flächeninhalte

for x := -1 to +1 step 1/n:
    // Flächeninhalt des Streifens an der Stelle x hinzuaddieren.
    // Die Höhe des Streifens wird exakt in der Mitte des Streifens gemessen.
    // Die 2 steht für die obere plus die untere Hälfte.
    // Der Faktor 1/n ist die Breite des Streifens.
    s += 2 * sqrt(1 - x*x) * 1/n

pi := s
```



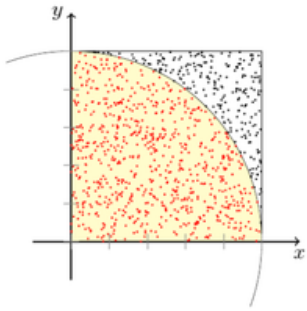
Kreisflächen-Integration

Die x-Koordinaten der untersuchten Fläche gehen von -1 bis $+1$. Da Kreise rund sind und dieser Kreis sein Zentrum auf den Koordinaten $0,0$ hat, liegen die y-Koordinaten ebenfalls im Bereich von -1 bis $+1$. Das Programm teilt die zu untersuchende Fläche in 2 Millionen schmale Streifen auf. Jeder dieser Streifen hat dieselbe Breite, nämlich $1/n$. Die Oberkante eines jeden Streifens ist jedoch unterschiedlich und ergibt sich aus der obigen Formel zu $\sqrt{1 - x^2}$, im Code wird das als `sqrt(1 - x*x)` geschrieben. Die Höhe eines jeden Streifens geht von der Oberkante bis zur Unterkante. Da die beiden Kanten bei Kreisen gleich weit von der Mittellinie entfernt sind, ist die Höhe genau das Doppelte der Kantenlänge, daher die 2 im Code.

Nach dem Durchlaufen der for-Schleife befindet sich in der Variablen s der Flächeninhalt des Kreises mit Radius 1. Um aus dieser Zahl den Wert von Pi zu ermitteln, muss diese Zahl gemäß der Formel $A = \pi \cdot r^2$ noch durch r^2 geteilt werden. In diesem Beispiel ist $r = 1$, daher ist das im Programmcode weggelassen.

Statistische Bestimmung

Eine Methode zur Bestimmung von π ist die statistische Methode. Für die Berechnung lässt man zufällige Punkte auf ein Quadrat „regnen“ und berechnet, ob sie innerhalb oder außerhalb eines einbeschriebenen Kreises liegen. Der Anteil der innen liegenden Punkte ist $\approx \frac{\pi}{4}$.



Viertelkreis, dessen Fläche durch die Monte-Carlo-Methode angenähert wird

Diese Methode ist ein Monte-Carlo-Algorithmus; die Genauigkeit der nach einer festen Schrittzahl erreichten Näherung von π lässt sich daher nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit angeben. Durch das Gesetz der großen Zahlen steigt jedoch *im Mittel* die Genauigkeit mit der Schrittzahl.

Der Algorithmus für diese Bestimmung ist:

```
function approximiere_pi(tropfenzahl)

    innerhalb := 0   // Zählt die Tropfen innerhalb des Kreises

    // So oft wiederholen, wie es Tropfen gibt:
    for i := 1 to tropfenzahl do

        // Zufälligen Tropfen im Quadrat [0,0] bis (1,1) erzeugen
        x := random(0.0 ..< 1.0)
```

```
        y := random(0.0 ..< 1.0)

        // Wenn der Tropfen innerhalb des Kreises liegt ...
        if x * x + y * y <= 1.0
            innerhalb++   // Zähler erhöhen

    return 4.0 * innerhalb / tropfenzahl
```

Die `4.0` im Code ergibt sich daraus, dass in der Tröpfchensimulation nur die Anzahl für einen Viertelkreis berechnet wurde. Um daraus die (hochgerechnete) Anzahl für einen ganzen Kreis zu bekommen, muss die berechnete Anzahl noch mit 4 multipliziert werden. Da die Zahl Pi das Verhältnis zwischen der Kreisfläche und dem Quadrat des Radius ist, muss die so erhaltene Zahl noch durch das Quadrat des Radius geteilt werden. Der Radius ist in diesem Fall 1, daher kann das Teilen weggelassen werden.

Buffonsches Nadelproblem

→ *Hauptartikel: Buffonsches Nadelproblem*

Eine weitere auf Wahrscheinlichkeiten beruhende und ungewöhnliche Methode ist das Buffonsche Nadelproblem von Georges-Louis Leclerc de Buffon (1733 vorgetragen, 1777 veröffentlicht). Buffon warf Stöcke über die Schulter auf einen gekachelten Fußboden. Anschließend zählte er, wie oft sie die Fugen trafen. Eine praktikablere Variante beschrieb Jakow Perelman im Buch *Unterhaltsame Geometrie.* Man nehme eine ca. 2 cm lange Nadel – oder einen anderen Metallstift mit ähnlicher Länge und Durchmesser, am besten ohne Spitze – und zeichne auf ein Blatt Papier eine Reihe dünner paralleler Striche, die um die doppelte Länge der Nadel voneinander entfernt sind. Dann lässt man die Nadel sehr häufig (mehrere hundert- oder tausendmal) aus einer beliebigen aber konstanten Höhe auf das Blatt fallen und notiert, ob die Nadel eine Linie schneidet oder nicht. Es kommt nicht darauf an, wie man das Berühren eines Striches durch ein Nadelende zählt. Die Division der Gesamtzahl N der Nadelwürfe durch die Zahl P der Fälle, in denen die Nadel eine Linie geschnitten hat, ergibt

$$\frac{N}{P} = \frac{\pi}{2}\frac{d}{\ell},$$

wobei ℓ die Länge der Nadeln und d den Abstand der Linien auf dem Papier bezeichnet. Daraus ergibt sich leicht eine Näherung für π.[24] Die Nadel kann dabei auch gebogen oder mehrfach geknickt sein, wobei in diesem Fall auch mehr als ein Schnittpunkt pro Wurf möglich ist und entsprechend mehrfach gezählt werden muss. In der Mitte des 19. Jahrhunderts kam der Schweizer Astronom Rudolf Wolf durch 5000 Nadelwürfe auf einen Wert von $\pi \approx 3{,}159$.

Methode von Gauß, Brent und Salamin

Die Berechnung der Bogenlänge einer Lemniskate über elliptische Integrale und deren Approximation über das Arithmetisch-geometrische Mittel nach Gauß liefert das schnell konvergierende Verfahren von Salamin und Brent zur numerischen Berechnung.[25]

Geometrische Konstruktionen

Aufgrund der Transzendenz von π ist es nicht möglich, durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal eine Strecke mit der exakten Länge von π Längenheiten zu erstellen. Es existieren jedoch sowohl eine Reihe von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen, die sehr gute Näherungen liefern, als auch Konstruktionen, die dank eines weiteren Hilfsmittels zusätzlich zu Zirkel und Lineal eine exakte Konstruktion ermöglichen. Als ein solches weiteres Hilfsmittel kommen dabei insbesondere als Quadratizes bezeichnete Kurven zum Einsatz, die mit Hilfe eines speziellen Zeichengeräts oder einer Schablone gezeichnet werden können.

Näherungskonstruktionen

Zur geometrischen Konstruktion der Zahl π gibt es die Näherungskonstruktion von Kochański aus dem Jahr 1685, mit der man einen Näherungswert der Kreiszahl mit einem Fehler von weniger als 0,002 Prozent bestimmen kann.[26] Es handelt sich also um eine Näherungskonstruktion für die (exakt nicht mögliche) Quadratur des Kreises.

143 Jahre später, nämlich 1828, veröffentlichte C. G. Specht seine *Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges* im *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Für die Annäherung fand er den Wert

$$5 \cdot \sqrt{\frac{439}{278}} = 6{,}28318528\ldots\ .$$ [27]

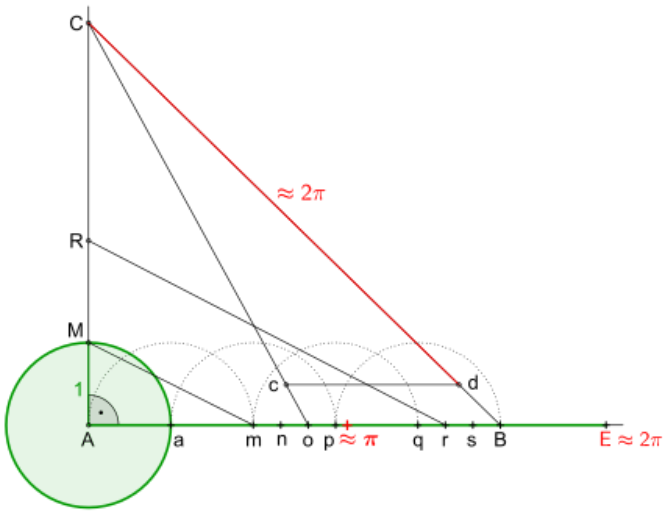
Halbiert man diesen Wert, ergibt sich eine Dezimalzahl, bei der sieben Nachkommastellen mit denen der Kreiszahl π übereinstimmen:

$$3{,}141\ 592\ 640\ 1\ldots\ \approx \pi.$$

Eine zeichnerische Darstellung wird in dem oben angeführten Journal nicht erfasst.

Anmerkung des Herausgebers:

> “ *) Es wird dem Leser leicht sein, die Figur nach der Beschreibung zu entwerfen.”
> – C. G. Specht: 40. Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges.[27]



Kreiszahl π, Annäherungskonstruktion nach C. G. Specht, 1828

Die nachfolgende Beschreibung der nebenstehenden Konstruktion ist eine Anlehnung an das Original der Konstruktionsbeschreibung.[27]

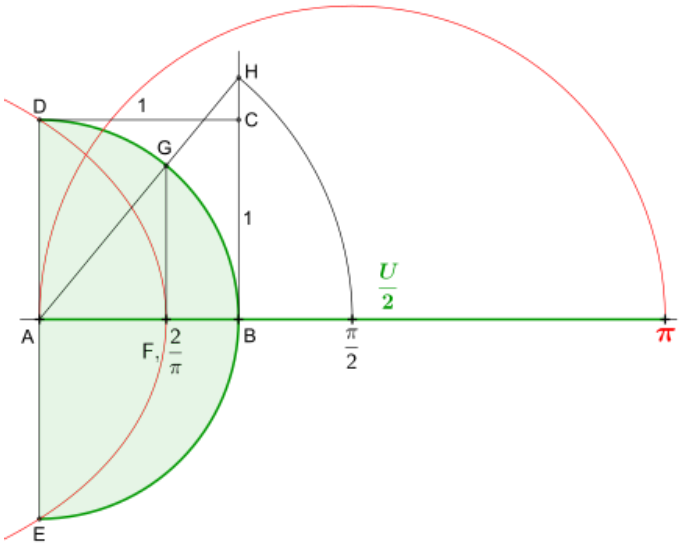
Zeichne zuerst den Einheitskreis um den Punkt A und dann ab A eine gerade Linie; dabei ergibt sich a. Anschließend wird in A eine Senkrechte zur Geraden errichtet; sie erzeugt M. Es folgen auf der Geraden ab a hintereinander vier Halbkreise mit dem Radius $\overline{Aa}$ jeweils um den sich neu ergebenden Schnittpunkt, dabei entstehen die Punkte m, p, q und B. Nach der Dreiteilung der Strecken $\overline{mp}$ in n und o sowie $\overline{qB}$ in r und s, wird nun der Punkt M mit m verbunden. Die dabei entstandene Strecke $\overline{Mm}$ auf die Senkrechte ab A abgetragen ergibt R. Verbinde auch den Punkt R mit r und übertrage die neue Strecke $\overline{Rr}$ ab A auf die Senkrechte; es ergibt sich C. Es geht weiter mit den Verbindungen der Punkte C mit o sowie C mit B. Beim Übertragen der Strecke $\overline{AB}$ auf die Strecke $\overline{Co}$ ab C ergibt sich c. Abschließend zeichne ab c eine Parallele zur Strecke $\overline{AB}$, die $\overline{CB}$ in d schneidet. Die somit entstandene Strecke $\overline{Cd}$ entspricht annähernd dem Wert 2π.

Die Annäherung an die Kreiszahl $\pi = \dfrac{U}{d}$ kann z. B. auf folgende Art und Weise verdeutlicht werden:

Wäre der Durchmesser d eines Kreises $100\,\mathrm{km}$, würde sein angenäherter Umfang $U = d\pi$ nur um ca. $2{,}7\,\mathrm{mm}$ kürzer als sein theoretischer Wert sein.

Quadratrix des Hippias als zusätzliches Hilfsmittel

Die nebenstehende Darstellung zeigt die Kreiszahl π als Strecke, erstellt mit Hilfe der Quadratrix des Hippias.



Kreiszahl π als exakte Konstruktion mithilfe der Quadratrix, Radius $r = 1$

Es beginnt mit einer Geraden ab dem Punkt A und einer Senkrechten auf diese Gerade durch A. Anschließend wird der Halbkreis mit dem Radius $r = 1$ um A gezogen; dabei ergeben sich die Schnittpunkte B, D und E. Nun konstruiert man das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es folgt die Konstruktion der Quadratrix, ohne „Lücke“ auf der X-Achse, mit der Parameterkurve $\gamma : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$:[28][29]

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} t \cot(t) & , t \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ \frac{2}{\pi} & , t = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi} t$$

Die Quadratrix schneidet nach dem Satz des Dinostratos die Seite $\overline{AB}$ ihres zugehörigen Quadrates im Punkt F und generiert damit auf der Geraden, nun als Zahlengerade genutzt, den Wert $\dfrac{2}{\pi}$. Das Errichten der Senkrechten auf die Strecke $\overline{AB}$ ab $\dfrac{2}{\pi}$ bis zum Halbkreis ergibt den Schnittpunkt G. Nach der Verlängerung der Strecke $\overline{BC}$ über C hinaus und dem Zeichnen einer geraden Linie ab A durch G bis zur Verlängerung ergibt sich der Schnittpunkt H. Eine Möglichkeit u. a. ist nun, die Länge der Strecke $\overline{AH}$ mit Hilfe des Strahlensatzes zu bestimmen. In der Zeichnung ist ersichtlich, dass $\dfrac{2}{\pi}$ der Strecke $\overline{AF}$ entspricht. Infolgedessen sind nach dem ersten Strahlensatz die Verhältnisse der Abschnitte

$$|AF| : |AB| = |AG| : |AH|,$$

umgeformt und die entsprechenden Werte eingesetzt ergibt sich

$$|AH| = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{\pi}} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Nun wird der Kreisbogen mit dem Radius $\overline{AH}$ um A bis auf die Zahlengerade gezogen; es entsteht der Schnittpunkt $\frac{\pi}{2}$. Der abschließende Thaleskreis über $\frac{\pi}{2}$ ab dem Punkt A ergibt somit exakt die Kreiszahl π.

Experimentelle Konstruktion

Die folgende Methode nutzt die in der Kreisfläche „versteckte“ Kreiszahl π, um mit Hilfe experimenteller Physik den Wert von π als messbare Größe darzustellen.[30]

Ein Zylinder mit dem Radius $r = 1$ und der Gefäßhöhe $\hat{h}_Z \approx 1{,}5$ wird bis auf die Höhe $h_Z = 1$ mit Wasser gefüllt. Die so bestimmte Wassermenge wird nun vom Zylinder in einen Quader umgefüllt, der eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge $a = 1$ und eine Gefäßhöhe von $\hat{h}_Q \approx 4$ aufweist.

Wassermenge im Zylinder V_Z in Volumeneinheiten [VE]:

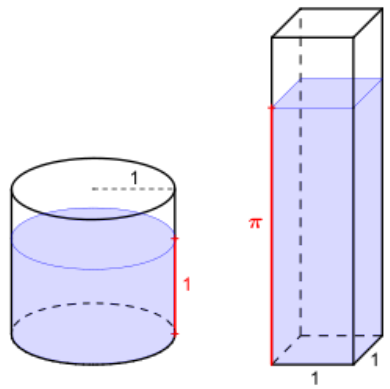
$$V_Z = r^2 \pi h_Z = 1^3 \cdot \pi = 3{,}14159\ldots \text{ [VE]}$$ [31]

Wasserstand im Quader h_Q in Längeneinheiten [LE]:

$$V_Q = a^2 h_Q = 1^2 h_Q = V_Z, \text{ daraus } h_Q$$ [32]

$$h_Q = \frac{1^3 \pi}{1^2} = \pi = 3{,}14159\ldots \text{ [LE]}$$

Das Ergebnis zeigt: Eine Wassermenge, die im Zylinder den Wasserstand 1 [LE] hat, liefert – umgefüllt in den Quader – den Wasserstand π [LE].



Kreiszahl π als experimentelle Konstruktion:
1. Zylinder mit Wasserstand = **1** [LE]
2. Quader mit umgefüllter Wassermenge, Wasserstand = π [LE]

Formeln, Anwendungen, offene Fragen

Formeln, die π enthalten

Formeln der Geometrie

In der Geometrie treten die Eigenschaften von π als Kreiszahl unmittelbar hervor.

- Umfang eines Kreises mit Radius r: $U = 2\pi r$
- Fläche eines Kreises mit Radius r: $A = \pi r^2$
- Volumen einer Kugel mit Radius r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Oberfläche einer Kugel mit Radius r: $A_O = 4\pi r^2$
- Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe a: $V = r^2 \pi a$
- Volumen eines durch die Rotation des Graphen $y = f(x)$ um die x-Achse definierten Rotationskörpers mit den Grenzen a und b: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x$

Formeln der Analysis

Im Bereich der Analysis spielt π ebenfalls in vielen Zusammenhängen eine Rolle, zum Beispiel bei

- der Integraldarstellung $\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, die Karl Weierstraß 1841 nutzte, um π zu definieren,[33]
- der unendlichen Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler, siehe auch Riemannsche Zetafunktion),

- der gaußschen Normalverteilung: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ oder in anderer Darstellung: $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x = \pi$,
- der Stirling-Formel als Näherung der Fakultät für große n: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,
- der Fourier-Transformation: $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$.

Carl Friedrich Gauß

Formeln der Funktionentheorie

Wie für alle Teilgebiete der Analysis ist auch für die Funktionentheorie (und darüber hinaus für die gesamte komplexe Analysis) die Kreiszahl von grundlegender Bedeutung. Als herausragende Beispiele sind hier

- die Euler-Identität $e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$[A 5]

zu nennen sowie

- die Integralformel von Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$.[34][35]

Jean Baptiste Joseph Fourier

Darüber hinaus wird die Bedeutung der Kreiszahl ebenfalls augenfällig in den Formeln zur Partialbruchzerlegung der komplexwertigen trigonometrischen Funktionen, die im Zusammenhang mit dem Satz von Mittag-Leffler stehen. Hier sind vor allem

- die Partialbruchzerlegung des Kotangens:[36][37][38][39]

$$\begin{aligned}
\pi\cot(\pi z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+n} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + 2z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \\
&= z \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

zu erwähnen sowie die daraus – neben weiteren! – zu gewinnenden

- Partialbruchzerlegungen zu Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \\
\left(\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right)^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - \frac{2n-1}{2})^2} \quad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{2n-1}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}\right)
\end{aligned}$$

Die obige Partialbruchreihe zum Sinus liefert dann durch Einsetzen von $z = \frac{1}{2}$ die bekannte Reihendarstellung[40]

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

die ihrerseits direkt zu der **eulerschen Reihendarstellung**

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

führt.

Neben diesen von den Partialbruchreihen herrührenden π-Formeln kennt die Funktionentheorie noch eine große Anzahl weiterer davon, die statt der Darstellung mit unendlichen Reihen eine Darstellung mittels unendlicher Produkte aufweisen. Viele von ihnen gehen auf das Werk von Leonhard Euler zurück (s. u.).

Formeln der Zahlentheorie

- Die relative Häufigkeit, dass zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen, die unterhalb einer Schranke M liegen, teilerfremd sind, strebt mit $M \to \infty$ gegen $\frac{6}{\pi^2}$.

Formeln der Physik

In der Physik spielt π neben

- der Kreisbewegung: $\omega = 2\pi f$ (Winkelgeschwindigkeit gleich 2π mal Umlauffrequenz)

vor allem bei Wellen eine Rolle, da dort π über die Sinus- und Kosinusfunktion eingeht; somit also zum Beispiel

- in der Quantenmechanik: $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ (Heisenbergsche Unschärferelation),

außerdem

- in der Berechnung der Knicklast $F_K = \frac{\pi^2 EI}{s^2}$
- und bei der Reibung von Partikeln in Flüssigkeiten (Gesetz von Stokes) $F_R = 6\,\pi\,\eta\,r\,v.$

Produktformeln von Leonhard Euler

- Wird die Folge der Primzahlen wie üblich mit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, \dots)$ bezeichnet, so gilt:[41]

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{{p_k}^2}{{p_k}^2 - 1} &&= \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \ldots = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{49}{48} \cdot \ldots \\
\frac{\pi^4}{90} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{{p_k}^4}{{p_k}^4 - 1} &&= \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \ldots = \frac{16}{15} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{625}{624} \cdot \frac{2401}{2400} \cdot \ldots \\
\frac{\pi^8}{9450} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{{p_k}^8}{{p_k}^8 - 1} &&= \frac{2^8}{2^8-1} \cdot \frac{3^8}{3^8-1} \cdot \frac{5^8}{5^8-1} \cdot \frac{7^8}{7^8-1} \cdot \ldots = \frac{256}{255} \cdot \frac{6561}{6560} \cdot \frac{390625}{390624} \cdot \frac{5764801}{5764800} \cdot \ldots
\end{aligned}$$

- Es gehen auf Euler auch die folgenden Produktformeln zurück, welche die Kreiszahl mit der komplexen Gammafunktion und dem komplexen Sinus und Kosinus verbinden:[42][43]

  Die erste der drei folgenden Formeln bezeichnet man auch als eulerschen Ergänzungssatz. Bei den beiden anschließenden Produktformeln für Sinus und Kosinus handelt es sich um absolut konvergente Produkte. Beide Produktformeln ergeben sich aus dem Ergänzungssatz, wobei die Produktformel des Kosinus ihrerseits wegen $\cos(z) = \frac{\sin(2z)}{2\sin(z)}$ eine direkte Anwendung der Produktformel des Sinus ist.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \\
\sin(\pi z) &= \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \quad (z \in \mathbb{C}) \\
\cos(\pi z) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right) \quad (z \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

  Die Produktformel des Sinus führt dann mit $z = \mathrm{i}$ zu dieser interessanten Beziehung (Folge A156648 in OEIS):[44]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \qquad = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \approx 3{,}6760779103749$$

Offene Frage der Normalität

Eine zurzeit besonders aktuelle mathematische Frage bezüglich π ist, ob sie eine normale Zahl ist, das heißt, ob sie zum Beispiel in einer binären (oder jeder anderen n-ären) Zahlendarstellung jede mögliche endliche Binär- bzw. sonstige Zifferngruppe gleichermaßen enthält – so wie es die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugte.

In letzter Konsequenz würde das beispielsweise bedeuten, dass π alle bisher und zukünftig geschriebenen Bücher irgendwo in codierter Binärform enthalten muss (analog zum Infinite-Monkey-Theorem).

Bailey und Crandal zeigten im Jahr 2000 mit der oben erwähnten Bailey-Borwein-Plouffe-Formel, dass die Normalität von π zur Basis 2 auf eine Vermutung der Chaostheorie reduziert werden kann.[A 6]

Physiker der Purdue Universität haben im Jahre 2005 die ersten 100 Millionen Dezimalstellen von π auf ihre Zufälligkeit hin untersucht und mit kommerziellen Zufallszahlengeneratoren verglichen. Der Forscher Ephraim Fischbach und sein Mitarbeiter Shu-Ju Tu konnten dabei keinerlei verborgene Muster in der Zahl π entdecken. Demnach sei nach Ansicht Fischbachs die Zahl π tatsächlich eine gute Quelle für Zufälligkeit. Allerdings schnitten einige Zufallszahlengeneratoren noch besser als π ab.

Bislang ist nicht einmal bekannt, ob nicht ab einer Stelle beispielsweise nur noch die Ziffern 5 und 6 auftreten.[45]

Sonstiges

Rekorde und Kuriositäten

Pi-Bodenmosaik am Eingang des Mathematikgebäudes der TU Berlin

- Freunde der Zahl π feiern am 14. März den Pi-Tag wegen der amerikanischen Datumsnotation 3/14.
- Im Jahr 1897 wurden im US-Bundesstaat Indiana mit dem Indiana-Pi-Bill-Gesetzentwurf *(for an act introducing a new mathematical truth)* für die Zahl π per Gesetz 4 bzw. 3,2 vorgeschlagen. Der Hobbymathematiker Edwin J. Goodwin war sicher, die Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Er schlug der Regierung den Handel vor, auf alle Tantiemen aus der Anwendung seiner Entdeckung in der mathematischen Aus- und Weiterbildung zu verzichten, wenn seine Entdeckung zum Gesetz erhoben würde. Erst nach der Aufklärung durch Clarence A. Waldo, einem Mathematikprofessor der Purdue University, der von dem Gesetzesvorhaben zufällig bei einem Besuch des Parlaments erfuhr, vertagte die zweite Kammer des Parlaments den vom Repräsentantenhaus (Landtag) bereits einstimmig beschlossenen Entwurf auf unbestimmte Zeit.[46]
- Der § 30b der Straßenverkehrszulassungsordnung bestimmt in Deutschland für die Berechnung des (für die Kfz-Steuer relevanten) Hubraums eines Verbrennungsmotors: „Für pi wird der Wert von 3,1416 eingesetzt."
- Die Versionsnummer des Textsatzprogramms TeX von Donald E. Knuth wird entgegen den üblichen Konventionen der Software-Entwicklung seit den 1990er Jahren so inkrementiert, dass sie sich langsam π annähert. Die aktuelle Version aus dem Jahr 2014 trägt die Nummer 3,14159265.[47]
- Der Versionsname der freien Geoinformationssystemssoftware QGIS lautet in der Version 3.14 „Pi". Für Bugfix-Versionen werden zusätzliche Dezimalstellen hinzugefügt.[48]
- Wissenschaftler senden mit Radioteleskopen die Kreiszahl ins Weltall. Sie sind der Meinung, dass andere Zivilisationen diese Zahl kennen müssen, wenn sie das Signal auffangen können.
- Der aktuelle Rekord im Pi-Vorlesen liegt bei 108.000 Nachkommastellen in 30 Stunden. Der Weltrekordversuch begann am 3. Juni 2005 um 18:00 Uhr und wurde am 5. Juni 2005 um 0:00 Uhr erfolgreich beendet. Über 360 Leser lasen jeweils 300 Nachkommastellen. Organisiert wurde der Weltrekord vom Mathematikum in Gießen.

Film, Musik, Kultur und Literatur

Pi in der Wiener Opernpassage. Die Zahl steht in der Mitte der Spiegelwand.

- Im Roman *Der Zauberberg* von Thomas Mann schildert der Erzähler im Kapitel *Der große Stumpfsinn* auf mitleidig-belächelnde Weise, wie die Nebenfigur des Staatsanwalts Paravant den „verzweifelten Bruch" Pi zu enträtseln versucht. Paravant glaubt, dass die „planende Vorsehung" ihn dazu bestimmt habe, „das transzendente Ziel in den Bereich irdisch genauer Erfüllung zu reißen". Er bemüht sich, in seiner Umgebung eine „humane Empfindlichkeit zu wecken für die Schande der Verunreinigung des Menschengeistes durch die heillose Irrationalität dieses mystischen Verhältnisses", und fragt sich, „ob nicht die Menschheit sich die Lösung des Problems seit Archimedes' Tagen viel zu schwer gemacht habe, und ob diese Lösung nicht in Wahrheit die kindlich einfachste sei." In diesem Zusammenhang erwähnt der Erzähler den historischen Zacharias Dase, der Pi bis auf zweihundert Stellen nach dem Komma berechnet hat.
- In der Science-Fiction-Serie *Raumschiff Enterprise* bemächtigt sich in Folge 43, *Der Wolf im Schafspelz* (orig. Titel *Wolf in the Fold*), ein fremdes Wesen des Bordcomputers. Der 1. Offizier Spock befiehlt darauf dem Computer, die Zahl Pi bis auf die letzte Nachkommastelle zu berechnen. Durch diese Aufgabe wird der Computer so überfordert, dass das Wesen den Computer wieder verlässt.

- 1981 wurde Carl Sagans Buch *Contact* veröffentlicht. Das Buch beschreibt das SETI-Programm zur Suche nach außerirdischer Intelligenz und damit verbundene philosophische Betrachtungen. Es endet mit der fiktiven Beantwortung der Frage, ob das Universum zufällig entstanden ist oder planvoll geschaffen wurde. Die Zahl π spielt für die spannende und im Rahmen der Handlung folgerichtige Antwort die zentrale Rolle.
- 1988 initiierte Larry Shaw den Pi-Tag am 14. März im Exploratorium.
- 1998 veröffentlichte Darren Aronofsky *(Requiem for a Dream)* den Film *Pi (1998), in dem ein mathematisches Genie (Sean Gullette als „Maximilian Cohen") die Weltformel aus π herausfiltern möchte.*
- Auf dem 2005 erschienenen Doppelalbum *Aerial* von Kate Bush ist ein Lied der Zahl Pi gewidmet.
- Die im November 2006 eröffnete Medieninstallation Pi in der Wiener Opernpassage widmet sich unter anderem der Kreiszahl.
- Im Film *Nachts im Museum 2* (2009) ist die Kreiszahl die Kombination für die Tafel des Ahkmenrah. Die Kombination wird mit Hilfe von Wackelkopf-Einsteins gelöst und öffnet in dem Film das Tor zur Unterwelt.
- Die progressive Deathcore-Band After the Burial hat auf ihrem Debütalbum *Forging a Future Self* das Lied *Pi (The Mercury God of Infinity)* veröffentlicht. Es besteht aus einem Akustikgitarrensolo, auf das ein Breakdown folgt, dessen Rhythmus an die ersten 110 Stellen der Kreiszahl angelehnt ist.[A 7]

Pi-Sport

→ *Hauptartikel: Pi-Sport*

Das Memorieren der Zahl Pi ist die beliebteste Möglichkeit, das Merken langer Zahlen unter Beweis zu stellen. So ist aus dem Lernen von Pi ein Sport geworden. Der Inder Rajveer Meena ist offizieller Weltrekordhalter mit bestätigten 70.000 Nachkommastellen, die er am 21. März 2015 fehlerfrei in einer Zeit von 10 Stunden aufsagte. Er wird im Guinness Book of Records als Rekordhalter geführt.

Der inoffizielle Weltrekord lag im Oktober 2006 bei 100.000 Stellen, aufgestellt von Akira Haraguchi. Der Japaner brach damit seinen ebenfalls noch inoffiziellen alten Rekord von 83.431 Nachkommastellen. Den deutschen Rekord hält Jan Harms mit 9140 Stellen. Für das Memorieren von Pi werden spezielle Mnemotechniken angewandt. Die Technik unterscheidet sich dabei nach den Vorlieben und Begabungen des Gedächtniskünstlers sowie der Menge der zu memorierenden Nachkommastellen.

Für das Merken der ersten Ziffern von Pi gibt es einfache Merksysteme, dazu Pi-Sport-Merkregeln.

Entwicklung der Nachkommastellen von π

Mathematiker	Jahr	Dezimalstellen	Methode	Rechenzeit
Ägypten, Rechenbuch des Ahmes (Papyrus Rhind)	ca. 16. Jh. v. Chr.	1	Beispiel	
Archimedes	ca. 250 v. Chr.	2	96-Eck	
Liu Hui	nach 263	5	3072-Eck	
Zu Chongzhi	ca. 480	6		
Dschamschid Masʿud al-Kaschi	ca. 1424	15	$3 \cdot 2^{28}$-Eck	
Ludolph van Ceulen	1596	20		
Ludolph van Ceulen	1610	35	2^{62}-Eck	
William Jones[4] John Machin	1706	100	**Reihenentwicklungen** *William Jones:* Es sei $\alpha = 2\sqrt{3}$, dann ist $\pi = \alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}\cdots$ *John Machin:* $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$	
Jurij Vega	1794	126		
William Shanks	1853	(527)	Reihenentwicklung von $\arctan\frac{1}{5}$ und $\arctan\frac{1}{239}$. Berechnung der ersten 707 Dezimalstellen von π von Hand. Im Jahr 1945 wurde entdeckt, dass die letzten 180 Stellen falsch waren.	
Levi B. Smith, John W. Wrench	1949	1.120		
G. Reitwiesner[49]	1949	2.037	mit dem Röhren-Rechner ENIAC	70 h
Nicholson, Jaenel	1954	3.092	Naval Ordnance Research Calculator	0:13 h
George E. Felton	1957	7.480	Pegasus	33 h
F. Genuys[49]	1958	10.000	mit dem Magnetkernspeicher-Rechner IBM 704, per Machin-Formel	10 h
George E. Felton	1958	10.021	Pegasus	33 h
Jean Guilloud	1959	16.167	IBM 704	4:18 h
Daniel Shanks, John W. Wrench[49]	1961	100.265	mit dem Transistoren-Computer IBM 7090	8:43 h
Jean Guilloud, J. Filliatre	1966	250.000	IBM 7030	41:55 h
Jean Guilloud, M. Dichampt	1967	500.000	CDC 6600	28:10 h
Jean Guilloud, Martin Boyer	1973	1.001.250	CDC 7600	23:18 h
Kazunori Miyoshi, Yasumasa Kanada	1981	2.000.036	FACOM M-200	137:18 h
Jean Guilloud	1981	2.000.050		
Yoshiaki Tamura	1982	2.097.144	MELCOM 900II	7:14 h
Yoshiaki Tamura, Yasumasa Kanada	1982	4.194.288	HITAC M-280H	2:21 h
Yoshiaki Tamura, Yasumasa Kanada	1982	8.388.576	HITAC M-280H	6:52 h
Yasumasa Kanada, Sayaka Yoshino, Yoshiaki Tamura	1982	16.777.206	HITAC M-280H	<30 h
Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura, Yoshinobu Kubo	1987	134.217.700		
David und Gregory Chudnovsky	1989	1.011.196.691		
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1997	51.539.600.000		
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1999	206.158.430.000		

Yasumasa Kanada	2002	1.241.100.000.000	Berechnung: $\pi = 48 \arctan \frac{1}{49} + 128 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239} + 48 \arctan \frac{1}{110443}$ Verifikation:[50] $\pi = 176 \arctan \frac{1}{57} + 28 \arctan \frac{1}{239} - 48 \arctan \frac{1}{682} + 96 \arctan \frac{1}{12943}$	
Daisuke Takahashi	2009	2.576.980.370.000	Berechnung: Gauß-Legendre-Algorithmus	
Fabrice Bellard[51][52]	2010	2.699.999.990.000	Berechnung: TachusPi Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Bellards Formel)	131 Tage
Shigeru Kondo, Alexander Yee[53][54]	2010	5.000.000.000.000	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Plouffes und Bellards Formel)	90 Tage
Shigeru Kondo, Alexander Yee[55]	2011	10.000.000.000.050	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Plouffes und Bellards Formel)	191 Tage
Shigeru Kondo, Alexander Yee[56]	2013	12.100.000.000.050	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Bellards Formel)	82 Tage
Sandon Van Ness (Houkouonchi)[57][58]	2014	13.300.000.000.000	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Bellards Formel)	208 Tage
Peter Trüb[57][59] / DECTRIS[60]	2016	22.459.157.718.361	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Bellards Formel)	105 Tage
Emma Haruka Iwao / Google LLC[61][62]	2019	31.415.926.535.897	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Plouffes und Bellards Formel)	121 Tage
Timothy Mullican[63][64]	2020	50.000.000.000.000	Berechnung: y-cruncher Software (Chudnovsky-Formel, Verifikation: Plouffes und Bellards Formel)	303 Tage

Alternative Kreiszahl τ

Der amerikanische Mathematiker Robert Palais schlug 2001 in einer Ausgabe des Mathematik-Magazins *The Mathematical Intelligencer* vor, für π, statt wie bisher den Quotienten aus Umfang und *Durchmesser* eines Kreises, in Zukunft den Quotienten aus Umfang und *Radius* (entsprechend 2π) als grundlegende Konstante zu verwenden.[65] Seine Argumentation beruht darauf, dass in vielen mathematischen Formeln der Faktor 2 vor der Kreiszahl auftauche. Ein weiteres Argument ist die Tatsache, dass die neue Konstante im Bogenmaß einen Vollwinkel darstellt, statt wie π einen halben Winkel, und so weniger willkürlich wirkt. Die neu normierte Kreiszahl,[66] für deren Notation Michael Hartl und Peter Harremoës den griechischen Buchstaben τ (Tau) vorschlugen,[67] würde diese Formeln verkürzen. Nach dieser Konvention gilt dann $\tau = 2\pi = 6{,}283185\ldots$, also $\pi = \frac{\tau}{2}$.

Literatur

- Jörg Arndt, Christoph Haenel: *Π [Pi]*. Algorithmen, Computer, Arithmetik. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer Verlag, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8 (mit CD-ROM, 1. Auflage. 1998 – ohne CD-ROM, ISBN 3-540-63419-3).
- Heinrich Behnke, Friedrich Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Band 77). Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1965.
- Petr Beckmann: *A History of π*. St. Martin's Press, New York City 1976, ISBN 978-0-312-38185-1 (englisch).
- Ehrhard Behrends (Hrsg.): *Π [Pi] und Co*. Kaleidoskop der Mathematik. Springer, Berlin / Heidelberg 2008, ISBN 978-3-540-77888-2.
- David Blatner: *Π [Pi]*. Magie einer Zahl. In: *rororo Sachbuch* (= *rororo*. Nr. 61176). Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 2001, ISBN 3-499-61176-7 (Originaltitel: *The Joy of Π [pi]*. Übersetzt von Hainer Kober).
- Jonathan Borwein, Peter Borwein: *Pi and the AGM*. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity. In: *Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advan*. 2. Auflage. Wiley, New York NY 1998, ISBN 0-471-31515-X (englisch).
- Egmont Colerus: *Vom Einmaleins zum Integral*. Mathematik für Jedermann (= *rororo-Sachbuch*. Nr. 6692). Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 1974, ISBN 3-499-16692-5.
- Jean-Paul Delahaye: *Π [Pi]*. Die Story. Birkhäuser, Basel 1999, ISBN 3-7643-6056-9.
- Keith Devlin: *Sternstunden der modernen Mathematik*. berühmte Probleme und neue Lösungen (= *dtv-Taschenbuch 4591*). 2. Auflage. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1992, ISBN 3-423-04591-4 (Originaltitel: *Mathematics*. Übersetzt von Doris Gerstner, Lizenz des Birkhäuser-Verlags, Basel).
- Leonhard Euler: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Springer Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1983, ISBN 3-540-12218-4 (Erster Teil der Introductio in Analysin Infinitorum – Reprint der Ausgabe Berlin 1885).
- Eberhard Freitag, Rolf Busam: *Funktionentheorie 1* (= *Springer-Lehrbuch*). 3., neu bearbeitet und erweiterte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 2000, ISBN 3-540-67641-4.
- Klaus Jänich: *Einführung in die Funktionentheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin (u. a.) 1980, ISBN 3-540-10032-6.
- Paul Karlson: *Vom Zauber der Zahlen*. Eine unterhaltsame Mathematik für jedermann. In: *Das moderne Sachbuch*. 8., überarbeitete Auflage. Band 41. Ullstein, Berlin 1965 (ohne ISBN, früherer Titel: *Du und der Zauber der Zahlen*).

- Karel Markowski: *Die Berechnung der Zahl Π [(Pi)] aus Sinus- und Tangens-Intervallen*. 1. Auflage. Trigon, Potsdam 2007, ISBN 978-3-9810752-1-2.
- Konrad Knopp: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Band 2). 5., berichtigte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 1964, ISBN 3-540-03138-3.
- Konrad Knopp: *Funktionentheorie II*. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie (= *Sammlung Göschen*. Band 703). 11. Auflage. de Gruyter, Berlin 1965.
- Herbert Meschkowski: *Unendliche Reihen*. 2., verbesserte und erweiterte Auflage. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (u. a.) 1982, ISBN 3-411-01613-2.
- Jakow Perelman: *Unterhaltsame Geometrie*. Volk und Wissen, Berlin 1962.
- Jürgen Petigk: *Dreieckige Kreise oder wie man Π [Pi] mit einer Nadel bestimmen kann*. Mathematische Rätsel, Training fürs Gehirn. Komet, Köln 2007, ISBN 978-3-89836-694-6 (1998 als *Mathematik in der Freizeit* bei Aulis-Verlag Deubner, Köln erschienen, ISBN 3-7614-1997-X).
- Karl Helmut Schmidt: *Π [Pi]*. Geschichte und Algorithmen einer Zahl. Books on Demand GmbH, Norderstedt, ISBN 3-8311-0809-9 ([2001]).
- Karl Strubecker: *Einführung in die höhere Mathematik. Band 1: Grundlagen*. R. Oldenbourg Verlag, München 1956.
- Heinrich Tietze: *Mathematische Probleme*. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik. C. H. Beck, München 1990, ISBN 3-406-02535-8 (Sonderausgabe in einem Band, 1990 auch als dtv-Taschenbuch 4398 / 4399, ISBN 3-423-04398-9 – Band 1 und ISBN 3-423-04399-7 – Band 1).

Weblinks

Commons: Pi (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pi?uselang=de) – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien

Wiktionary: Kreiszahl – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen

- Beweis der Irrationalität von π in der *Formelsammlung Mathematik*
- Beweis der Transzendenz von e und π im *Beweisarchiv.*
- Albrecht Beutelspacher (Mathematikum Gießen): *Mathematik zum Anfassen – Die Zahl π. (https://www.br.de/fernsehen/ard-alpha/sendungen/mathematik-zum-anfassen/mathematik-zum-anfassen-albrecht-beutelspacher-die-zahl-pi100.html)* Bayern α.
- Werner Scholz: *Die Geschichte der Approximationen der Zahl. (http://magnet.atp.tuwien.ac.at/scholz/projects/fba/fba.html)* TU Wien, 3. November 2001.
- *Archimedes und die Ermittlung der Kreiszahl. (http://www.anderegg-web.ch/phil/archimedes.htm)*
- *The π-Search Page. (http://www.angio.net/pi/piquery)* Ziffernfolgen innerhalb von π suchen.
- *Pibel.de. (http://www.pibel.de/)* Auf dieser Website steht die Zahl Pi auf bis zu 10 Millionen Kommastellen zum Download bereit.
- *Aktuelle Weltrangliste der π-Auswendiglerner. (http://www.pi-world-ranking-list.com/)* Englisch.
- *Monte-Carlo-Methode zur Approximation von π. (http://web.archive.org/web/20151103174330/http://storage.pberndt.com/scripts/pi.html)*
- Don Zagier: *Zahlentheorie und die Kreiszahl Pi. (https://www.math.uni-freiburg.de/information/archiv/gauss.html)* Gaußvorlesung 2003 in Freiburg (Podcast).

Anmerkungen

1. Einen einfachen Irrationalitätsbeweis lieferte im Jahre 1947 der Zahlentheoretiker Ivan Niven. (Ivan Niven: *A simple proof that π is irrational*. In: *Bulletin of the American Mathematical Society*. Band 53, 1947, S. 509 (MR0021013 (https://mathscinet.ams.org/mathscinet/search/publdoc.html?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&pg4=AUCN&pg5=TI&pg6=RT&pg7=ALLF&pg8=ET&review_format=html&s4=Niven&s5=Irrational&s6=&s7=&s8=All&sort=Newest&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq&r=5&mx-pid=21013)).)
2. Hier sind alle Teilzähler gleich 1.
3. Hier sind alle Teilzähler gleich −1.
4. Dabei ist $n = 2{,}84438\ldots \cdot 10^{226}$.
5. Die *Euler-Identität* wird als Kombination der Kreiszahl π, der ebenfalls transzendenten eulerschen Zahl e, der imaginären Einheit i und der beiden algebraischen Basisgrößen 0 und 1 als eine der „schönsten mathematischen Formeln“ angesehen.
6. Für weitere Details siehe die Webseite von Bailey (http://crd.lbl.gov/~dhbailey/).
7. Das Lied auf YouTube mit Erklärung des Rhythmus in der Videobeschreibung, verfasst von einem der Gitarristen. *Video* (https://www.youtube.com/watch?v=v2ZLV-aYvB8) auf YouTube.

Einzelnachweise

1. Guilelmo [William] Oughtred: *Theorematum in libris Archimedis de Sphæra & Cylyndro Declaratio.* (https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10594178_00003.html?zoom=0.7000000000000002) Rerum quarundam

denotationes. In: *BSB Bayerische StaatsBibliothek digital.* Oughtred, William, Verlag: Lichfield, Oxoniae, 1663, S. 3, abgerufen am 21. August 2019 (Latein).

2. William Oughtred: *Theorematum in libris Archimedis de Sphæra & Cylyndro Declaratio.* 1663. In: *Clavis Mathematicae.* Lichfield, Oxford 1667, S. 201–214, hier S. 203.
3. Vgl. David Eugene Smith: *History of Mathematics.* Band 2. Dover, New York 1953, S. 312 (The Symbol π).
4. William Jones: *Synopsis Palmariorum Matheseos.* (https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN584116586?tify={%22pages%22:%5B255%5D,%22panX%22:0.537,%22panY%22:0.728,%22view%22:%22%22,%22zoom%22:0.566}) Palmariorum Matheseos, S. 243, siehe Seitenmitte: „1/2 Periphery (π)“ mit Angabe des Verhältnisses von halbem Umfang zu Radius bzw. Umfang zu Durchmesser auf 100 Nachkommastellen genau. In: *Göttinger Digitalisierungszentrum.* J. Matthews, London, 1706, abgerufen am 19. August 2019 (englisch).
5. William Jones: *Synopsis Palmariorum Matheseos.* (https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN584116586?tify={%22pages%22:%5B277%5D,%22panX%22:0.52,%22panY%22:0.899,%22view%22:%22scan%22,%22zoom%22:0.625}) Palmariorum Matheseos, S. 263, siehe unten: „3.14159, *&c.* = π […] Whence in the *Circle,* any one of these three, [area] *a,* [circumference] *c,* [diameter] *d,* being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = (a \div 1/4\ \pi)^{1/2}$, $c = d \times \pi = (a \times 4\pi)^{1/2}$, $a = 1/4\ \pi \times d^2 = c^2 \div 4\pi$.“ In: *Göttinger Digitalisierungszentrum.* J. Matthews, London, 1706, abgerufen am 19. August 2019 (englisch).
6. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 8.
7. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 10, 203.
8. Otto Forster: *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 12. Auflage. Springer Spektrum, Wiesbaden 2016, ISBN 978-3-658-11544-9, S. 150–151.
9. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 11.
10. Johann Heinrich Lambert: *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.* Verlag des Buchladens der Realschule, 1770, S. 156, eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=fKhEAAAAcAAJ&pg=PA156#v=onepage) in der Google-Buchsuche.
11. Peter Alfeld: *pi to 10,000 digits.* (http://www.math.utah.edu/~pa/math/pi.html) Department of Mathematics, University of Utah, 16. August 1996, abgerufen am 19. August 2019. Aufstellung der ersten 10 Millionen Stellen auf *pibel.de (http://3pi.org/PI/Pibel/pibel_10mio.pdf)* (PDF; 6,6 MB).
12. Shu-Ju Tu, Ephraim Fischbach: *Pi seems a good random number generator – but not always the best.* (https://news.uns.purdue.edu/html4ever/2005/050426.Fischbach.pi.html) Purdue University, 26. April 2005, abgerufen am 19. August 2019.
13. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 194.
14. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 33, 220.
15. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *PI: Algorithmen, Computer, Arithmetik*. 2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin 2000, ISBN 3-540-66258-8, S. 51–54.
16. Karl Strubecker: *Einführung in die höhere Mathematik. Band 1: Grundlagen*. R. Oldenbourg Verlag, München 1956, S. 87.
17. Jörg Arndt, Christoph Haenel: *Pi: Algorithmen, Computer, Arithmetik.* Springer-Verlag, 1998, S. 117 f., eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=nNOyBgAAQBAJ&pg=PA117) in der Google-Buchsuche.
18. Wilbur R. Knorr: *Archimedes and the Measurement of the Circle: A New Interpretation.* Arch. Hist. Exact Sci. 15, 1976, S. 115–140.
19. Christoph J. Scriba, Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie.* 3. Auflage. Springer, Berlin/ Heidelberg 2009, ISBN 978-3-642-02361-3, S. 172.
20. http://www.math.uu.nl/wiskonst/ruziesceulen/biovc.html Biographie van Ceulens
21. Guido Walz: *Lexikon der Mathematik: Band 4: Moo bis Sch*; Springer-Verlag, 2016, S. 193–194. (eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=YyagDQAAQBAJ&lpg&pg=PA193#v=onepage) in der Google-Buchsuche), abgerufen am 18. April 2020
22. Richard P. Brent: *Jonathan Borwein, Pi and the AGM.* (https://maths-people.anu.edu.au/~brent/pd/JBCC-Brent.pdf) (PDF) Australian National University, Canberra and CARMA, University of Newcastle, 2017, abgerufen am 19. August 2019.
23. Stanley Rabinowitz, Stan Wagon: *A Spigot Algorithm for the Digits of Pi.* In: *American Mathematical Monthly.* Vol. 102, Nr. 3, 1995. S. 195–203, *(PDF; 250 kB).* (https://web.archive.org/web/20130228180951/http://www.mathpropress.com/stan/bibliography/spigot.pdf) (Memento vom 28. Februar 2013 im *Internet Archive*).
24. Ehrhard Behrends, Peter Gritzmann, Günter M. Ziegler: *π und Co., Kaleidoskop der Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 2008, ISBN 978-3-540-77888-2, S. 157.
25. Markus Steinborn: *DerSalamin/Brent Algorithmus (AGM), Seminarausarbeitung.* (https://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/media/num/neundorf/Dokumente/Pi_und_e/Steinborn1.pdf#page=5&zoom=auto,-13,517) (PDF) 3 Elliptische Integrale. Technische Universität Ilmenau, 2004, S. 5, abgerufen am 16. Mai 2020.
26. Dieter Grillmayer: *2. Die Näherungskonstruktion von Kochanski*; Im Reich der Geometrie: Teil I: Ebene Geometrie, BoD – Books on Demand, 2009, S. 49 (eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=1AiuBgAAQBAJ&pg&pg=PA49#v=onepage) in der Google-Buchsuche), abgerufen am 26. Februar 2020
27. C. G. Specht: *40. Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges.*; Journal für die reine und angewandte Mathematik. A. L. Crelle, Dritter Band, Berlin bei G. Reimer, 1828, S. 405–406 (eingeschränkte Vorschau (https://books.go

ogle.de/books?id=1M0RbAAAAcAAJ&pg=PA405–406#v=onepage) in der Google-Buchsuche), abgerufen am 26. Februar 2020

28. Hans-Wolfgang Henn: *Elementare Geometrie und Algebra.* Verlag Vieweg+Teubner, 2003, S. 45–48: *Die Quadratur des Kreises.* (Auszug (Google) (https://books.google.de/books?id=2caZW8KRMtAC&pg=PA47#v=onepage))
29. Horst Hischer: *Mathematik in der Schule. Geschichte der Mathematik …* (http://horst.hischer.de/publikationen/zeitschr-beitraege/1994-MathSchule-MU_Gesch/1994-Math-Gesch-Teil2.pdf#5) (PDF) (2). Lösung klassischer Probleme. In: *(5) Probleme der Trisectrix.* 1994, S. 283–284, abgerufen am 21. Februar 2017.
30. *Konstruktion von pi, Schwimmbadmethode.* (https://de.wikiversity.org/wiki/Konstruktion_von_pi/Schwimmbadmethode/Beispiel) WIKIVERSITY, abgerufen am 19. Februar 2017.
31. Arnfried Kemnitz: *Gerade Kreiszylinder*; Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge, Springer-Verlag, 2010, S. 155 ff. (eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=nSuoAONBwBQC&pg&pg=PA156#v=onepage) in der Google-Buchsuche), abgerufen am 24. Februar 2020
32. Arnfried Kemnitz: *Parallelepiped und Würfel*; Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge, Springer-Verlag, 2010, S. 153–154 (eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=nSuoAONBwBQC&pg&pg=PA154#v=onepage) in der Google-Buchsuche), abgerufen am 24. Februar 2020
33. *Weierstraß-Definition von π*. In: Guido Walz (Hrsg.): *Lexikon der Mathematik*. 1. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Mannheim/Heidelberg 2000, ISBN 3-8274-0439-8.
34. E. Freitag: *Funktionentheorie 1.* Springer Verlag, ISBN 3-540-31764-3, S. 87.
35. Heinrich Behnke, Friedrich Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Band 77). Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1965, S. 120 ff.
36. Heinrich Behnke, Friedrich Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Band 77). Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1965, S. 245–246.
37. Konrad Knopp: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Band 2). 5., berichtigte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 1964, ISBN 3-540-03138-3, S. 212–213.
38. Konrad Knopp: *Funktionentheorie II*. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie (= *Sammlung Göschen*. Band 703). 11. Auflage. de Gruyter, Berlin 1965, S. 41–43.
39. Herbert Meschkowski: *Unendliche Reihen*. 2., verbesserte und erweiterte Auflage. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (u. a.) 1982, ISBN 3-411-01613-2, S. 150 ff.
40. Klaus Jänich: *Einführung in die Funktionentheorie*. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin (u. a.) 1980, ISBN 3-540-10032-6, S. 140.
41. Leonhard Euler: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Springer Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1983, ISBN 3-540-12218-4, S. 230 ff. (Erster Teil der Introductio in Analysin Infinitorum – Reprint der Ausgabe Berlin 1885).
42. Konrad Knopp: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Band 2). 5., berichtigte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 1964, ISBN 3-540-03138-3, S. 397–398, 454.
43. Eberhard Freitag, Rolf Busam: *Funktionentheorie 1* (= *Springer-Lehrbuch*). 3., neu bearbeitet und erweiterte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 2000, ISBN 3-540-67641-4, S. 200–201.
44. Konrad Knopp: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (= *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Band 2). 5., berichtigte Auflage. Springer Verlag, Berlin (u. a.) 1964, ISBN 3-540-03138-3, S. 454.
45. Delahaye: *π die Story.* 1999, S. 211, eingeschränkte Vorschau (https://books.google.de/books?id=RNb95MU9fUUC&pg=PA211#v=onepage) in der Google-Buchsuche.
46. Petr Beckmann: *History of Pi*. St. Martin's Press, 1974 ISBN 978-0-88029-418-8, S. 174–177 (englisch).
47. tug.ctan.org (ftp://tug.ctan.org/pub/tex-archive/systems/knuth/dist/tex/tex.web)
48. *Road Map.* (https://www.qgis.org/en/site/getinvolved/development/roadmap.html) Abgerufen am 27. Juni 2020.
49. *Calculation of π to 100,000 Decimals* (http://www.ams.org/journals/mcom/1962-16-077/S0025-5718-1962-0136051-9/S0025-5718-1962-0136051-9.pdf), Mathematics of Computation, Bd. 16, 1962, S. 76–99, abgerufen am 29. November 2018 (englisch).
50. Yasumasa Kanada: *Current publisized world record of pi calculation is as in the followings.* (http://www.super-computing.org/pi_current.html) In: *Kanada Laboratory home page.* 20. Oktober 2005, abgerufen am 1. Mai 2010 (englisch).
51. Fabrice Bellard: *TachusPI.* (https://bellard.org/pi/pi2700e9/tpi.html) bellard, abgerufen am 19. März 2020 (englisch).
52. Fabrice Bellard: *Computation of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer.* (https://bellard.org/pi/pi2700e9/pipcrecord.pdf) bellard, 11. Februar 2010, abgerufen am 19. März 2020 (englisch).
53. *Neuer Rekord: Tüftler und Student berechnen Pi auf fünf Billionen Ziffern.* (http://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/neuer-rekord-tueftler-und-student-berechnen-pi-auf-fuenf-billionen-ziffern-a-710336.html) In: *Spiegel Online.* 5. August 2010, abgerufen am 5. Januar 2015.
54. Alexander Jih-Hing Yee: *5 Trillion Digits of Pi - New World Record.* (http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-5t/details.html) numberworld, abgerufen am 19. März 2020.
55. Alexander J. Yee, Shigeru Kondo: *Round 2… 10 Trillion Digits of Pi.* (http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html) Auf: *numberworld.org.* 22. Oktober 2011.

56. Alexander J. Yee, Shigeru Kondo: *12.1 Trillion Digits of Pi.* (http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-12t/) Auf: *numberworld.org.* 6. Februar 2014.
57. *Pi.* (http://numberworld.org/digits/Pi/) In: *numberworld.org.* 15. März 2019, abgerufen am 12. August 2019.
58. Houkouonchi: *13.3 Trillion Digits of Pi.* (http://3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2.eu/pi-wissen/pi-nachkommastellen-rekorde/) Auf: π-wissen.eu 8. Oktober 2014.
59. Peter Trüb: *Der Schweizer, der 22,4 Billionen Dezimalstellen von Pi berechnet hat.* (https://www.nzz.ch/wissenschaft/video-serie-nerdzz-der-wahrscheinlich-laengste-rekord-der-welt-ld.152445) In: *NZZ.* Abgerufen am 21. März 2017.
60. *Home -> Success Stories – DECTRIS.* (https://web.archive.org/web/20161206063444/https://www.dectris.com/successstories.html#success_pi) In: *dectris.com.* Archiviert vom Original (https://giftbot.toolforge.org/deref.fcgi?url=https%3A%2F%2Fwww.dectris.com%2Fsuccessstories.html%23success_pi) am 6. Dezember 2016; abgerufen am 6. Dezember 2016.
61. Alexander J. Yee: *Records set by y-cruncher.* (http://www.numberworld.org/y-cruncher/records.html) In: *numberworld.org.* 14. März 2019, abgerufen am 14. März 2019 (englisch).
62. Jens Minor: *Neuer Weltrekord: Google Cloud berechnet die Kreiszahl Pi auf 31,4 Billionen Stellen & macht sie frei zugänglich.* (https://www.googlewatchblog.de/2019/03/neuer-weltrekord-google-cloud/) In: *GoogleWatchBlog.* 14. März 2019, abgerufen am 14. März 2019 (deutsch).
63. Timothy Mullican: *Calculating Pi: My attempt at breaking the Pi World Record.* (https://blog.timothymullican.com/calculating-pi-my-attempt-breaking-pi-record) In: *Bits and Bytes | the ramblings of a sysadmin / cyber security professional.* Timothy Mullican, 26. Juni 2019, abgerufen am 31. Januar 2020 (englisch).
64. Alexander Yee: *Records set by y-cruncher.* (http://www.numberworld.org/y-cruncher/records.html) In: *numberworld.org.* 30. Januar 2020, abgerufen am 31. Januar 2020 (englisch).
65. Bob Palais: *π is wrong!* In: *The Mathematical Intelligencer.* Band 23, Nr. 3, 2001, Springer-Verlag, New York, S. 7–8. math.utah.edu (http://www.math.utah.edu/%7Epalais/pi.pdf) (PDF; 144 kB).
66. Ulrich Pontes: *Revolution gegen die Kreiszahl: Physiker will Pi abschaffen.* (http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,771007,00.html#ref=nldt) In: *Spiegel online.* 28. Juni 2011, abgerufen am 29. Juni 2011.
67. Tauday / The Tau Manifesto (http://tauday.com/), abgerufen am 16. April 2011. Bob Palais selbst schlug zunächst ein doppeltes π vor, siehe Homepage von Bob Palais an der University of Utah, (http://www.math.utah.edu/~palais/pi.html), abgerufen am 15. April 2011.

Abgerufen von „https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Kreiszahl&oldid=202023758“

Diese Seite wurde zuletzt am 19. Juli 2020 um 19:24 Uhr bearbeitet.

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden.
Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.